УДК 517.518.83

О ВЛИЯНИИ СДВИГА АРГУМЕНТА ПРИБЛИЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА КАЧЕСТВО АППРОКСИМАЦИИ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

И.А. Шакиров[1]

1 *iskander@tatngpi.ru*; Набережночелнинский государственный педагогический университет

Для константы Лебега оператора Фурье получены вполне определенные приближенные представления. Погрешности аппроксимации оценены в равномерной дискретной метрике, когда соответствующие остаточные члены принадлежат различным классам.

Ключевые слова: норма оператора Фурье, асимптотическое равенство, остаточный член константы Лебега, наилучшее приближение константы Лебега.

Классический оператор Фурье $S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ порождает константу Лебега

$$L_n = \|S_n\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt,\ n \in N\ (L_0 = 1, L_1 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.43599112\ldots). \quad (1)$$

В первой половине прошлого века Л. Фейером, Г. Сеге, Г. Харди для вычисления значения константы (1) были установлены различные формулы:

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathrm{tg}\frac{\pi k}{2n+1},\ L_n = \frac{16}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1}\sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{2m-1}\right),$$

$$L_n = 4\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{th}(2n+1)t}{\mathrm{th}\, t}\cdot\frac{dt}{\pi^2+4t^2},\ L_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}(2n+1)t}{\mathrm{sh}\, t}\cdot\ln[\mathrm{ctg}\, h((n+0.5)t)]dt.$$

Они имеют важное теоретическое значение, но сложны для вычисления значений константы Лебега. Поэтому поиск простых приближенных формул, позволяющих с достаточно малой погрешностью вычислить константу L_n, является актуальной задачей.

В 1910 г. Л. Фейер уточнил поведение константы (1) вида $L_n = O(\ln n)$, установив более точное асимптотическое равенство

$$L_n \equiv L(n) = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\ \ (n \to \infty). \quad (2)$$

С тех пор оценкой величин $O(1)$ в (2), L_n снизу и сверху, поиском элемента наилучшего равномерного (дискретного) приближения вида

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b\ \ (a, b \in R_0^+ = [0, +\infty))$$

для L_n занимались многие математики. Однако задача определения наилучших коэффициентов $a = a^*,\ b = b^*$ в приближенном равенстве

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b,\ n \in N\ \ ((a, b) \in \overline{\Omega} = R_0^+ \times R_0^+) \quad (3)$$

до сих пор остается нерешенной проблемой теории функций.

Для классов строго возрастающих (M^+) и строго убывающих (M^-) остаточных членов (функций аргумента n и параметров a, b) вида

$$O_n(a,b) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b,\ n \in N\ \left((a,b) \in \overline{\Omega}\right) \tag{4}$$

недавно автором получены следующие результаты.

Теорема 1 [1]. *В приближенном равенстве (3) наилучшее равномерное приближение константы Лебега в классе*

$$M^- = \{O_n(a,b) | (a,b) \in \Omega^- = [0, 1/2] \times [0, 3/2] \subset \overline{\Omega}\}$$

достигается при значениях параметров $a = a^- = 0.5$ *и* $b = b^- = 1.27100777\ldots$*, т.е. пара* $(a^-, b^-) \in \Omega^-$ *является решением экстремальной задачи*

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^-} \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^-) - b^- \right| = \varepsilon^- = 0.00065453\ldots. \tag{5}$$

Теорема 2 [2]. *В приближенном равенстве (3) наилучшее равномерное приближение константы Лебега в классе*

$$M^+ = \{O_n(a,b) | (a,b) \in \Omega^+ = [a^+, +\infty] \times [0, \frac{3}{2}] \subset \overline{\Omega}\}$$

достигается при значениях параметров $a = a^+ = 0.51188859\ldots$ *и* $b = b^+ = 1.26940801\ldots$*, т.е. пара* $(a^+, b^+) \in \Omega^+$ *является решением экстремальной задачи*

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^+} \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^+) - b^+ \right| = \varepsilon^+ = 0.00094523\ldots. \tag{6}$$

Из этих теорем видно, что поведение остаточных членов остается неизученной в классе

$$M^0 = \{O_n(a,b) | (a,b) \in \Omega^0 = (\frac{1}{2}, a^+) \times [0, \frac{3}{2}] \subset \overline{\Omega}\},$$

где они могут быть строго возрастающими либо убывающими, или функциями общего вида. Укажем вполне определенную функцию $O_n(a^0, b^0)$ общего вида из M^0, для которой имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Для остаточного члена* $O_n(a^0, b^0) \in M^0$ *с параметрами*

$$a^0 = \exp\left(\pi^2 \frac{L_1 - \alpha_0}{4}\right) - 1 = 0.50485280\ldots,\ b_0 = \alpha_0,$$

имеет место оценка

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^0} \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| < \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^0) - \alpha_0 \right| = \varepsilon^0 = 0.00031763\ldots, \tag{7}$$

где $\alpha_0 = \lim_{n\to\infty}[L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n] = 1.27035324\ldots$ *– известная константа Ватсона.*

Замечание 1. *Сравнение величин (5) – (7) показывает, что в теореме 3 результаты двух предыдущих теорем усилены более чем в два раза:* $\varepsilon^-/\varepsilon^0 = 2.06\ldots,\ \varepsilon^+/\varepsilon^0 = 2.97\ldots.$

Замечание 2. *В классе* M^0 *не существует остаточного члена, совпадающего всюду в* N *с константой* L_n.

Литература

1. Шакиров И. А. *О наилучшей приближенной замене константы Лебега оператора Фурье* // Материалы межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии, посвящен. юбилеям выдающихся профессоров Казанского ун-та, математиков Широковых. Казань: Казанский ун-т. Изд-во Академии наук РТ, 2016. – С. 352–353.

2. Шакиров И. А. *Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2017. – Т. 139. – С. 92–104.

INFLUENCE OF SHIFT OF THE ARGUMENT OF THE APPROXIMATING FUNCTION ON APPROXIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT FOR THE FOURIER OPERATOR

I.A. Shakirov

For the Lebesgue constant of the Fourier operator, some approximate formulas notions are received. Errors of approximation are estimated in the uniform discrete metrics when the corresponding remainders belong to various classes.

Keywords: norm of the Fourier operator, asymptotic equality, remainder of the Lebesgue constant, the best approximation of the Lebesgue constant.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Ф.М. Шамсудинов[1]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава, Таджикистан

В данной работе для одного гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной точкой получены представления многообразия решений при помощи двух произвольных функций одного независимого переменного, изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена граничная задача A.

Ключевые слова: интегральные представления, гиперболическое уравнение, многообразия решений, прямоугольник, свойства решений, граничная задача.

Пусть D – прямоугольник $\{(x,y): 0<x<\delta_1, \quad 0<y<\delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1=\{y=0,\ 0<x<\delta_1\},\quad \Gamma_2=\{x=0,\ 0<y<\delta_2\}.$$

В области D рассмотрим уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{a(x,y)}{r^\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{b(x,y)}{r^\beta}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{c(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u=\frac{f(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \tag{1}$$

где $r^2=x^2+y^2,\ a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ f(x,y)$ – заданные функции в области D, $\alpha>2$, $\beta<1$ (α, β – целые положительные числа).